Analisi, stima e previsione di dati, esercitazione in LADISPE, 3 Maggio 2007

Stima parametrica di una resistenza a partire da misure di tensione-corrente

È dato un insieme di misure descritte dalla seguente equazione:

$$V_k = RI_k + \eta_k, \quad k = 1, 2, ..., N$$

dove:
- R : resistenza da stimare
- V_k e I_k : misure di tensione e corrente ai capi della resistenza
- η_k : rumore bianco gaussiano di valore atteso nullo e varianza σ_k^2
- $N = 20$ misure

Problema:
Stimare la resistenza R usando i seguenti metodi:
- media campionaria
- media campionaria pesata
- minimi quadrati (non pesati)
- Gauss-Markov (minimi quadrati pesati mediante matrice di covarianza)
Paragonare le stime ottenute.

Traccia:

1. Caricare i dati contenuti nel file "dati_R_1.mat" nel workspace di Matlab (comando load). Per questi dati, la deviazione standard del rumore η_k è $\sigma_k = 4$, $\forall k$.

2. Generare una figura rappresentante i dati (comando plot).

3. Ottenere la stima a media campionaria come:

$$\widehat{R}_{mc} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{V_k}{I_k}$$

4. Ottenere la stima a media campionaria pesata come:

$$\widehat{R}_{mp} = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{V_k}{I_k}, \quad p_k = \frac{1}{\widehat{\sigma}_k^2} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\widehat{\sigma}_k^2} \right)^{-1}$$

   Provare con $\widehat{\sigma}_k = \sigma_k$ e con $\widehat{\sigma}_k = \sigma_k / I_k$.

5. Ottenere la stima dei minimi quadrati come:

$$\widehat{R}_{mq} = (I^T I)^{-1} I^T V$$

6. Ottenere la stima di Gauss-Markov come:

$$\widehat{R}_{gm} = (I^T Q I)^{-1} I^T Q V, \quad Q = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

7. Per ogni stima $\widehat{R}_*$ della resistenza ottenuta, inserire nella figura generata al punto 2 il grafico della retta $\widehat{R}_* I$.

Caricare i dati contenuti nel file "dati_R_2.mat" nel workspace di Matlab, assumere $\sigma_k = \overline{\sigma} I_k$, $\overline{\sigma} = 1$, $\forall k$, e ripetere i punti 2-7.